京都大学グローバルサイエンスキャンパス
2014年11月1日

社会基盤の構築と数学・物理のつながり

木村　亮

京都大学　教授

大学院工学研究科社会基盤工学専攻　専攻長

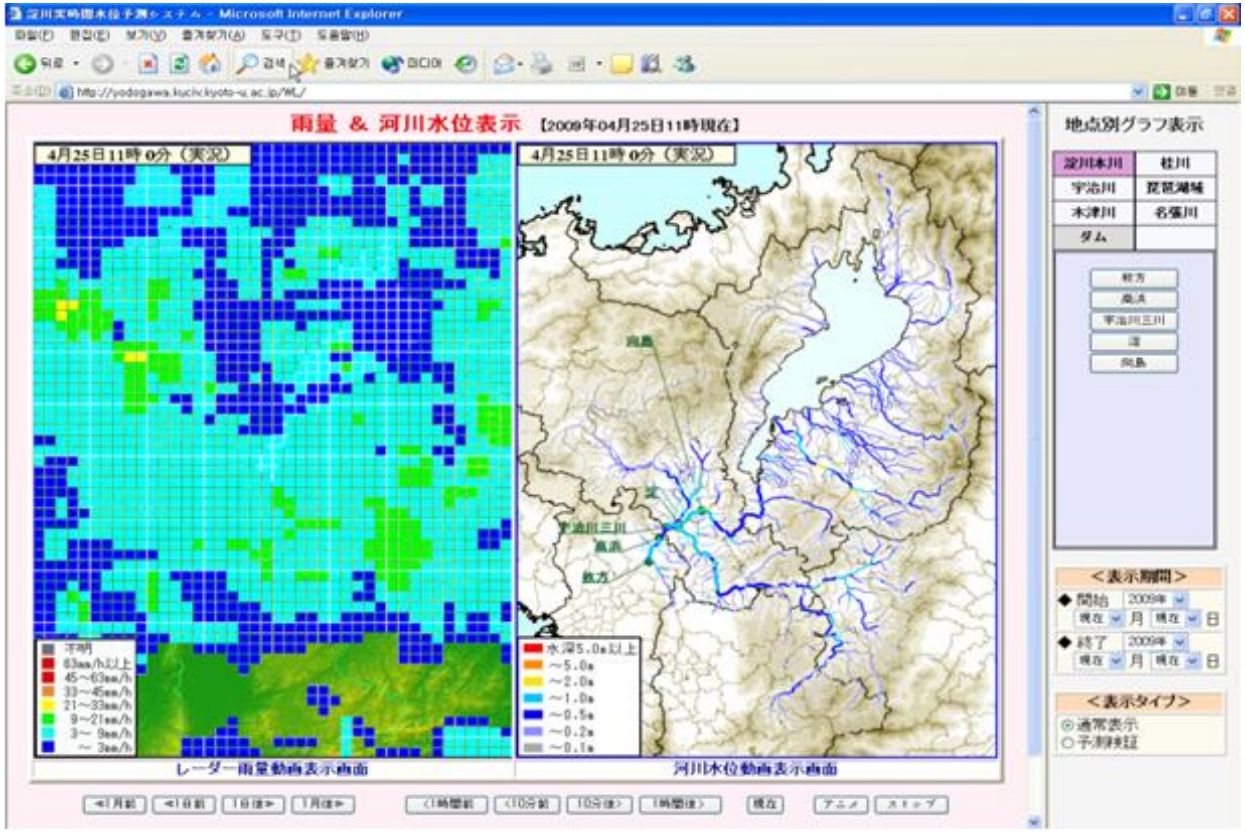
工学部地球工学科土木工学コース　コース長

社会基盤の構築と数学・物理

- 土木・環境・資源工学は人類が地球上で生存するための基盤の整備を担う，いわば「地球の外科医」である。　地球工学
- 構造物や地球空間を構成する物質の性質や振る舞いを3次元空間で捉え，その時間変化を評価予測する必要がある。
- 本講義では数学・物理の知識の社会基盤整備への応用を紹介する。

京都大学　オープンキャンパス　2014　　地球工学科

土木工学コース（土木）の紹介



淀川流域のリアルタイム洪水予測

土木コース長　　地球工学科　　木村　亮

1位　MIT
2位　Harvard大学
3位　Cambridge大学
4位　London大学
5位　インペリアルカレッジ

⋮

32位　東京大学

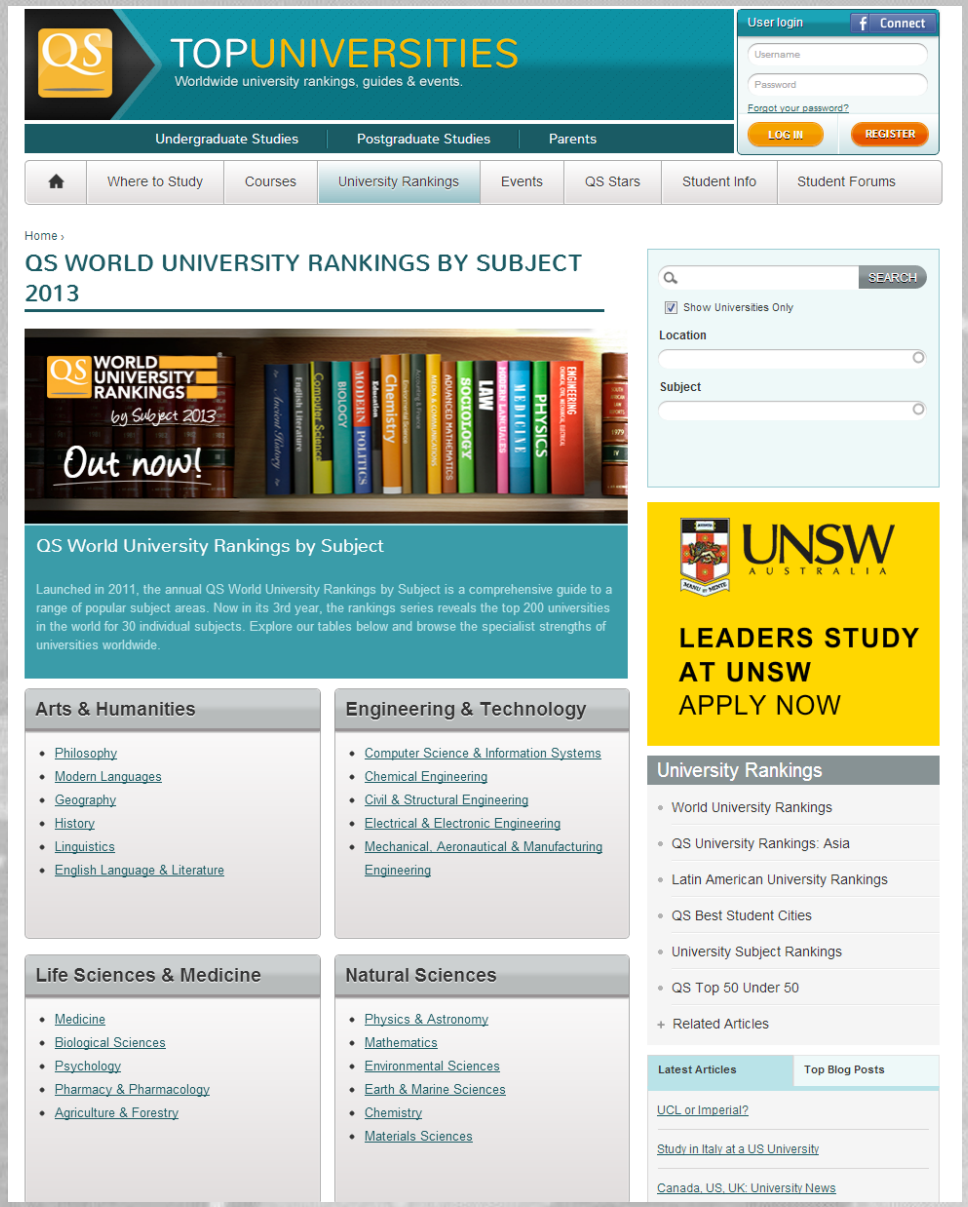
⋮

35位　京都大学

⋮

55位　大阪大学

世界の大学ランキング ：分野別ランキング



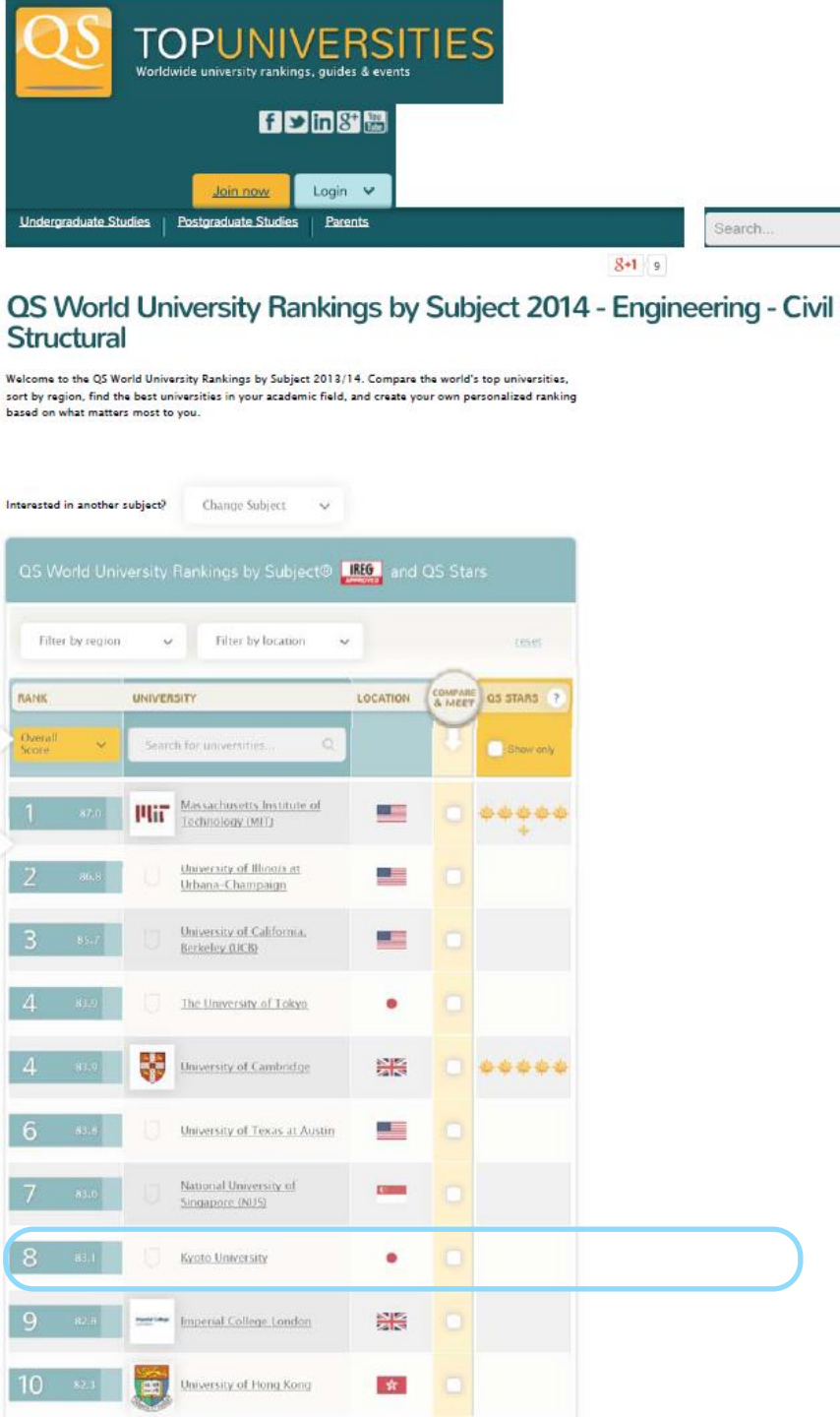
工学系

5分野のランキング

- 情報工学
- 工業化学
- 土木工学
- 電気工学
- 機械工学

世界の大学ランキング

分野	京大の順位
情報工学	51～100
工業化学	8
土木工学	8
電気工学	34
機械工学	30
物理学・天文学	21
生物科学	13



土木工学の4つの系

自然・社会・文化的環境
構造系
地下空間・親水空間
環境の創出と保全
社会空間の創出
水工系
土木工学
地盤系
公共政策
防災・減災
社会資本整備
計画系
災害に強い街つくり
災害に強い社会システム

道がない生活・・・？

もし、「道」がなかったら、
わたしたちの暮らしは、
どうなるのでしょう？

水害の多いまち・・・？

もし、「川」に手を加えなければ、
どれくらい、「水害」が起きてしまうのでしょう？

緑のない街・・・？

もし、「緑」がなかったら、
わたしたちの暮らしは、どうなるのでしょう？

ひょっとすると、わたしたちは、

道や緑がなかったら、
水害が多かったら……

普通の暮らしが、
出来なくなるかもしれません。

普通の暮らしのためには、
どこかで、誰かが、
道や緑や川の事を考えていくことが、
必要なのかもしれません。
それを考えていくのが、
土木の仕事です。

人々の暮らしを守り豊かにする

土木とは何だろう？

藤井　聡　教授　（京都大学　工学研究科）
土木学会誌, 93 (12), p. 57, 2008

土木工学とは Civil Engineering
　市民のための工学
　社会を文明化するための基礎工学

電気工学の「電気」も機械工学の「機械」も
何かをイメージするのは容易なのに
「土木」という二文字だけは
何ともイメージしづらい

「築土構木（ちくどこうぼく）」という四字熟語に土木という言葉が由来しているとの説がある

中国の古典哲学書「淮南子（えなんじ）」（紀元前2～1 世紀頃）の一節に次のような下りがある.
「昔、民は湿地に住み、穴ぐらに暮らしていたから、冬は霜雪、雨露に耐えられず、夏は暑さや蚊・アブに耐えられなかった. そこで、聖人（宗教家ではなく, 知徳が高き人物の意）が出て、民のために土を盛り材木を組んで室屋を作り、棟木を高くし軒を低くして雨風をしのぎ、寒暑を避け得た. かくして人びととは安心して暮らせるようになった」

第一に，土木という言葉が電気や機械のようにわかりにくいのも当たり前なのである．
電気や機械は対象とするモノや物理現象の名前である．しかし，土木とは土地を盛り、木を組むという「行為」の名称である．モノや物理現象は目で見ればそれが何だか分かる．しかし「行為」の名称であるならイメージしづらいのも致し方なきところだろう．

第二に，土木に関わる議論が「公に資する」という技術者としての倫理に関する議論と不可分であることも必然である．なぜなら，「築土構木」という行為を為したのは，一般の民が自分のために行う普通の行為なのではなく，知徳高き「聖人」が民のために為した行為だからである．

土木の偉大な先達が皆，公に資する志高き人物であったのは，土木が土木であることの必然だったのである．

京都大学

答えのない新しい問題や
難しい問題を解決する

問題の複雑さ　工学の世界

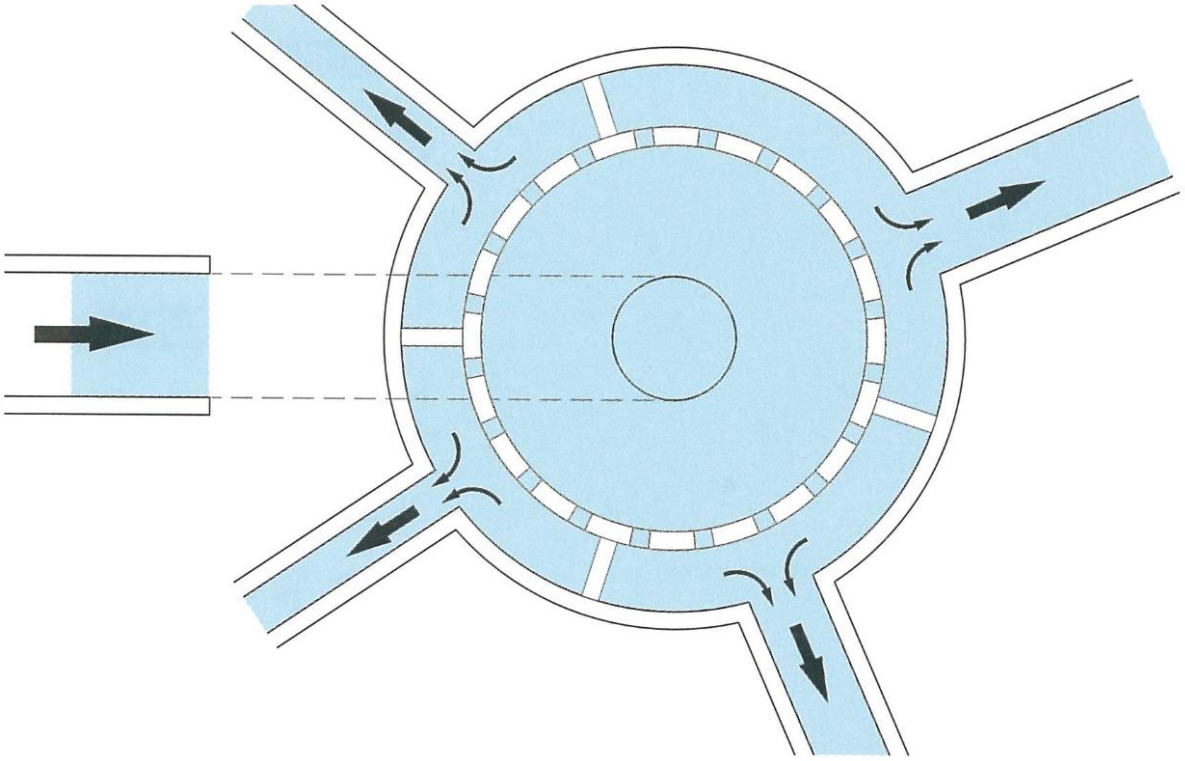
発想の大転換
＋ 若い人の力

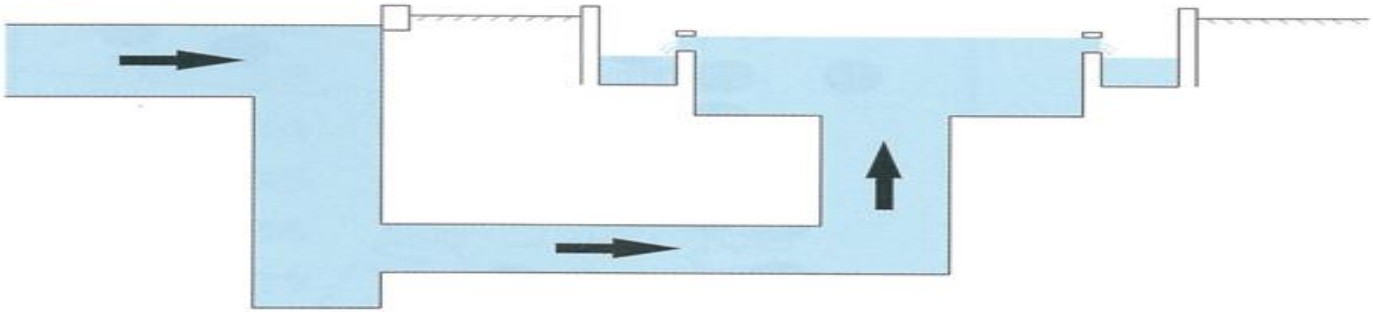
かねてより各地で農業用水にまつわる争いが絶えず
水の正確な分配は長年の懸案であった

「円筒分水工」

分配が正確かつ公平であることは誰もが一目で理解でき、機能美をも兼ね備えている構造物

円筒の中央からサイフォンの原理で湧き出させた水を円筒外周部から越流させ、外縁部に設けた仕切りの間隔や角度、また窓の数により、流下する水を6:3:1など一定の比率で各用水に分配できる。





長野県天竜川水系の西天竜幹線水路円筒分水工群

土木学会選奨土木遺産

工学的な問題解決の方法

- 実際の問題

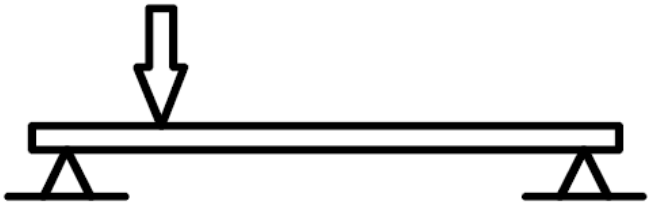
対象，現象の本質の抽出
・単純化
・仮定の導入

- 数理モデル
  - 支配方程式：物理法則，経験則に基づく

- 現象の再現
  - 設計に用いる
  - 現象の観測結果から対象（橋）の性能を予測する「逆問題」も多い

例）橋の設計

作用外力に対して安全な橋を作りたい
・外力：自重，風，走行車両，地震



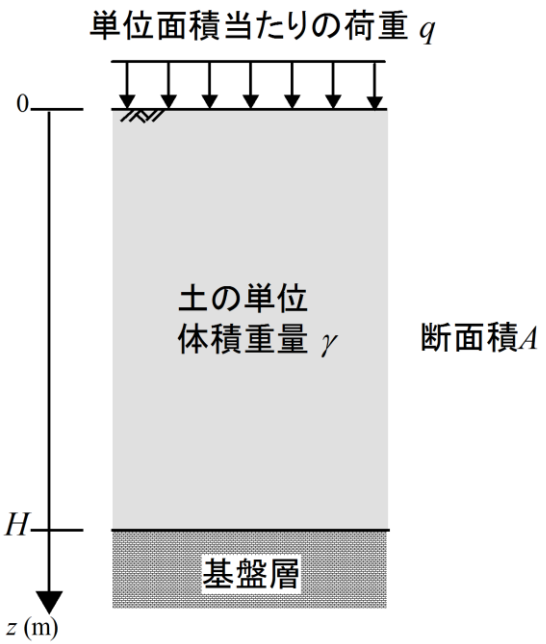
橋，作用外力のモデル化

橋の応答（変形）の予測

簡単な例で説明すると

- ある土地に構造物を建てるときにどの程度沈下が発生するかを予測したい。

- ステップ1：実際の対象をモデル化
  - 単純化（妥当性の判断は必須）
    - 1次元問題とする
    - 土を一様な連続体とし，降伏（破壊）に至らない範囲では弾性体である。
    - 構造物の荷重を面的な荷重に近似。
  - 必要な情報
    - 土層構成（層厚，地下水位など）
    - 地盤の単位体積重量，変形特性
  - 「モデル」であり，完全に記述するよりも，本質を捉えることが重要

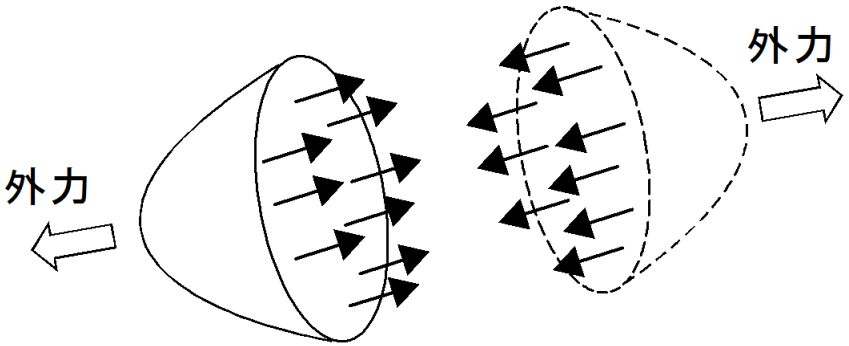


深さ z の点における沈下量 $u(z)$ を求める。

応力とは？

- 一般に外力として以下の力が作用
  - 表面力（境界面に作用）：ここでは地表面の荷重
  - 物体力（直接作用）：ここでは地盤の自重

- 連続体中の任意の断面を考えると，
  - 外力を受けて静止している。すなわち，断面にも力が作用する
  - 単位面積当たりの断面力：応力



- 地盤の発生ひずみは応力に依存（構成則）

簡単な例で説明すると

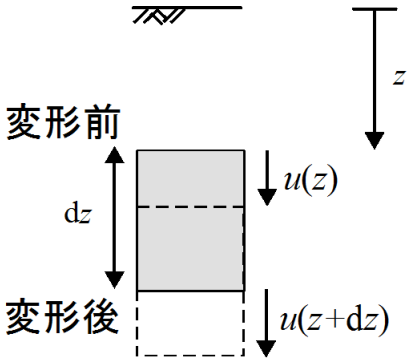
- ステップ2：現象を支配する法則の定式化
  - 構成則：地盤の応力ーひずみ関係（微小要素）
    - 実験等で得られた関係（ここでは弾性体）を定式化

$$\sigma = E\varepsilon \qquad \text{式①}$$

σ：応力（引張を正），E：変形係数，ε：ひずみ（伸びを正）

  - ひずみの適合条件式
    - 対象領域の変位とひずみが整合（適合）している

$$\varepsilon = \frac{u(z+\mathrm{d}z)-u(z)}{\mathrm{d}z} \Rightarrow \varepsilon = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z} \qquad \text{式②}$$



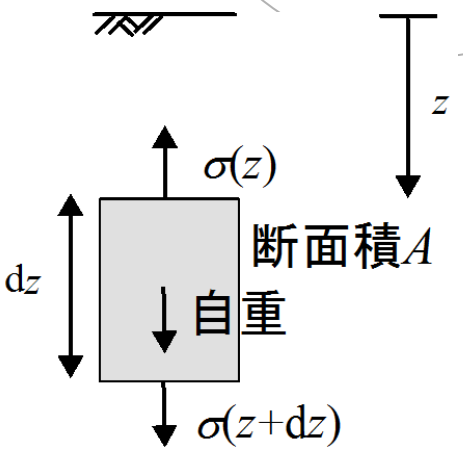
簡単な例で説明すると

- ステップ2(つづき)
  - 力の釣り合い式

$$\sigma(z+\mathrm{d}z)A+\gamma A\mathrm{d}z-\sigma(z)A=0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d\sigma}{dz}+\gamma=0 \qquad \text{式③}$$

γ : 土の単位体積重量（実験で決定）



  - 式①～③を連立（ u を求めることを意識）
    - 式②を式①に代入

$$\sigma=E\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z} \qquad \text{式④}$$

    - 式④を式③に代入

$$E\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}z^2}+\gamma=0 \qquad \text{式⑤}$$

この微分方程式を解けばよい

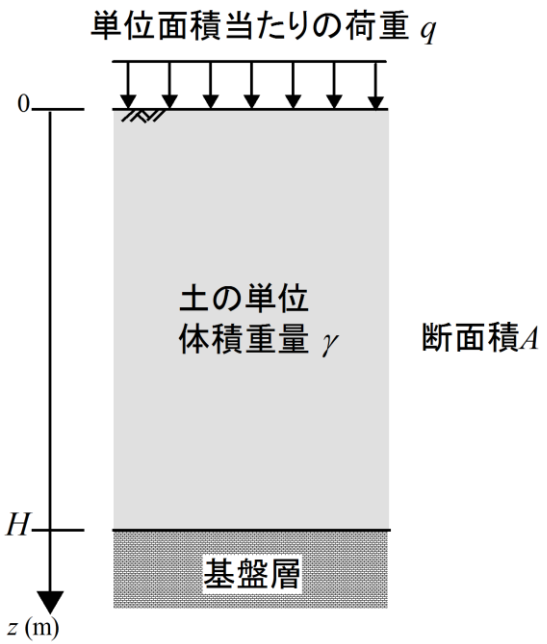
簡単な例で説明すると

- ステップ3:境界条件の決定
  - 支配方程式（式⑤）: 位置 z についての2階の微分方程式
  - 解は2つの積分定数を含む
  - 積分定数を決定するために，位置に関する制約条件（境界条件）が2つ必要。
  - 作成したモデルを考えると
    - 地表面に圧縮荷重 q が作用

      $$\sigma(0) = -q \quad at \quad z = 0$$ 式⑥

    - 基盤層は変形しない:

      $$u(H) = 0 \quad at \quad z = H$$ 式⑦



深さ z の点における沈下量 $u(z)$ を求める。

簡単な例で説明すると

- ステップ4:微分方程式の解の決定
  - 式⑤を2回積分し，式⑥，⑦から積分定数を決定する
  - 変位，応力の深さ方向の分布が求められる。

$$u(z)=\frac{q}{E}(H-z)+\frac{\gamma}{2E}\left(H^2-z^2\right)$$

$$\sigma(z)=E\frac{du}{dz}=-(\gamma z+q)$$

- 以上は非常に簡単な例であるが，同様の手順で実際の複雑かつ大規模な問題に取り組んでいる。
  - 動的問題（状態が時間的に変化する）への対応
  - 数値シミュレーションの導入
  - 実験，観測による精度の向上

三角関数の微分，公式を駆使して壁に作用する土の圧力（土圧）を求めてみよう！！

壁にかかる力　土圧

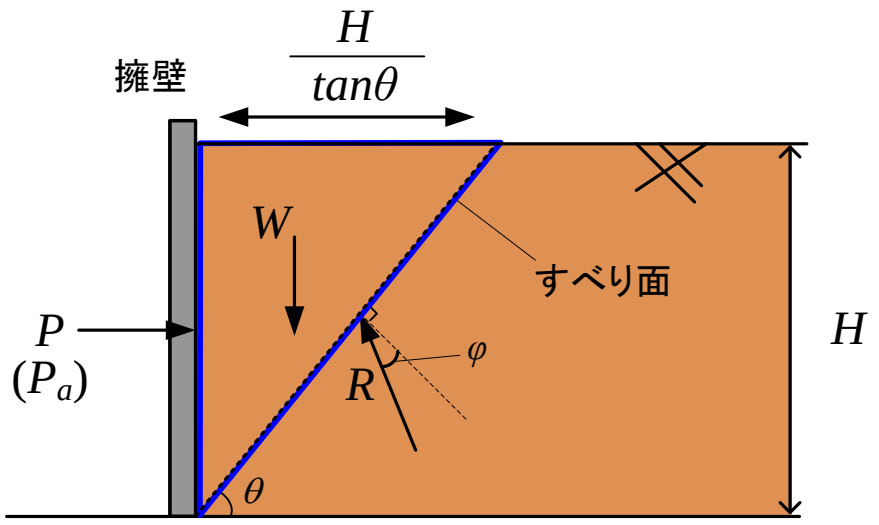
［問題］

右図のように擁壁によって，
三角形の土くさびはつり合っている．

主働状態におけるPの極大値が
主働土圧P_aである．

主働土圧P_aを求めよ．

（ P_aを γ, H, φ で表せ．）



主働状態

$$W = \frac{1}{2}\cdot\gamma\cdot H^2\frac{1}{\tan\theta}$$

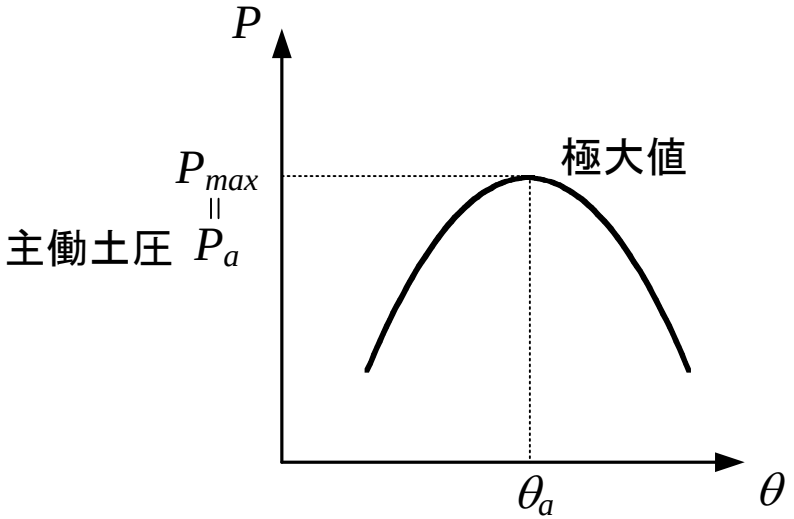
P : 土圧
W : 自重（三角形くさび）
R : 反力

［ヒント］

①三角形くさびにかかる力で
　つり合いの式をたてる．

② Pをθで微分する．

③ $\dfrac{dP}{d\theta}=0$ となるときのθを求め，
　Pの極大値P_aを求める．



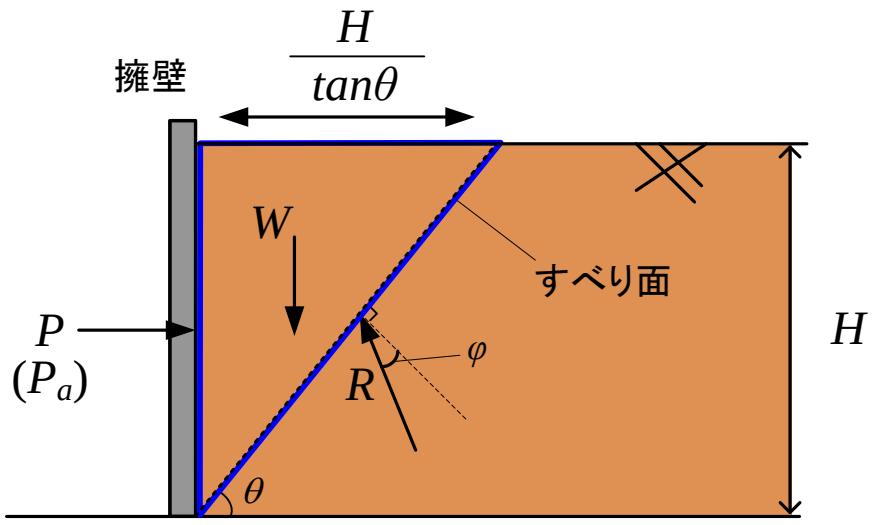
［問題］

右図のように擁壁によって，
三角形の土くさびはつり合っている．

主働状態におけるPの極大値が
主働土圧P_aである．

主働土圧P_aを求めよ．

（ P_aを γ, H, φ で表せ．）



主働状態

$$W = \frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot H^2 \frac{1}{\tan\theta}$$

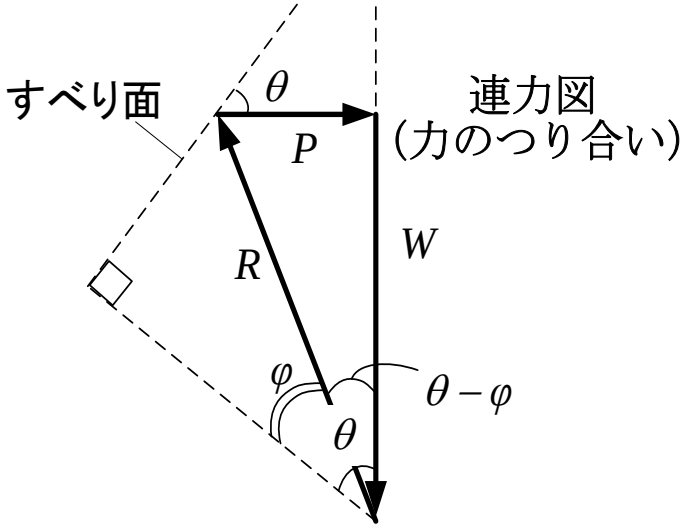
P : 土圧
W : 自重（三角形くさび）
R : 反力

［ヒント］

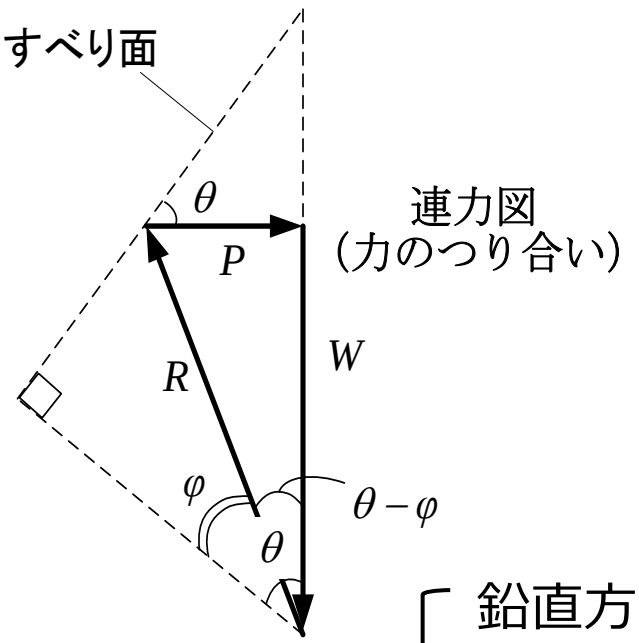
①三角形くさびにかかる力で
　つり合いの式をたてる．

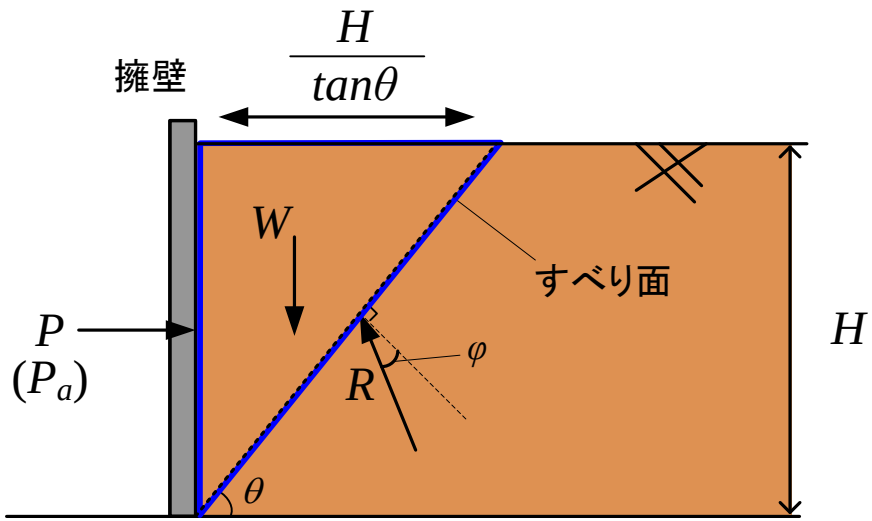
② Pをθで微分する．

③ $\dfrac{dP}{d\theta} = 0$　となるときのθを求め，
　Pの極大値P_aを求める．



［解答］





鉛直方向のつり合い：$P = R \cdot \sin(\theta - \varphi)$

水平方向のつり合い：$W = R \cdot \cos(\theta - \varphi)$

Rを消去して

$$P = W \cdot \tan(\theta - \varphi)$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

主働域の土塊の重量 $W = \frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot H^2 \frac{1}{\tan\theta}$ なので

$$P = \frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot H^2 \frac{\tan(\theta - \varphi)}{\tan\theta}$$

*P*を微分

$$P = \frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot H^2 \frac{\tan(\theta - \varphi)}{\tan\theta}$$

$$\frac{dP}{d\theta} = \frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot H^2 \cdot \left\{ \frac{\tan(\theta - \varphi)}{\tan\theta} \right\}'$$

正接の微分

$$(\tan\theta)' = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

分数の微分

$$y = \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$y' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

$$\frac{dP}{d\theta} = \frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot H^2 \cdot \left\{ \frac{\tan\theta}{\cos^2(\theta - \varphi)\tan^2\theta} - \frac{\tan(\theta - \varphi)}{\cos^2\theta \cdot \tan^2\theta} \right\}$$

$$\frac{dP}{d\theta} = \frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot H^2 \cdot \left\{ \frac{\cos\theta}{\cos^2(\theta - \varphi)\sin\theta} - \frac{\tan(\theta - \varphi)}{\sin^2\theta} \right\}$$

$$\frac{dP}{d\theta} = \frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot H^2 \cdot \left\{ \frac{\sin\theta\cos\theta - \sin(\theta - \varphi)\cos(\theta - \varphi)}{\sin^2\theta\cos^2(\theta - \varphi)} \right\}$$

$$\frac{dP_a}{d\theta} = 0$$ より

$$分子 = \sin\theta\cos\theta - \sin(\theta-\varphi)\cos(\theta-\varphi) = 0$$

$$\frac{1}{2}\sin 2\theta - \frac{1}{2}\sin 2(\theta-\varphi) = 0$$

$$\cos(2\theta-\varphi)\sin\varphi = 0$$

$\sin\varphi \neq 0$ より

$$\cos(2\theta-\varphi) = 0$$

$$2\theta - \varphi = \frac{\pi}{2}$$

$$\theta = \frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}$$

倍角の公式

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

和積の公式

$$\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

よって，主働土圧P_aは

$$P_a = \frac{1}{2}\cdot\gamma\cdot H^2\cdot\frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)}$$

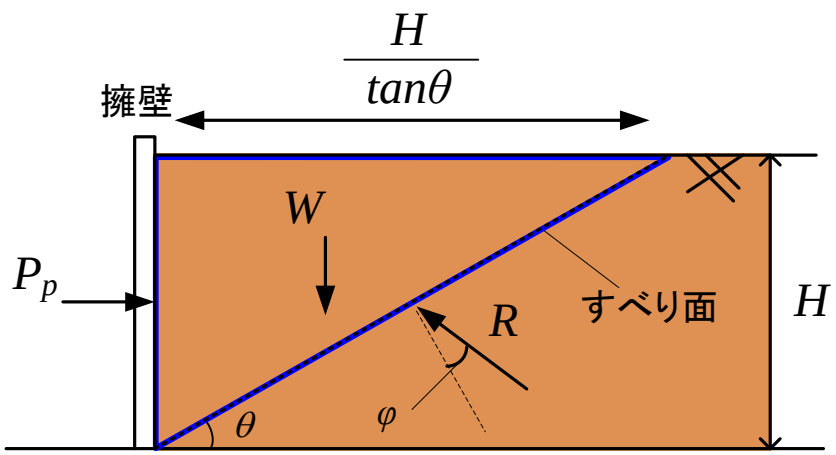
次は
受働土圧を求めてみよう！！

［問題］

右図のように擁壁によって，
三角形の土くさびはつり合っている．

受働状態におけるPの極小値が
受働土圧P_pである．

受働土圧P_pを求めよ．
（ P_pを γ, H, φ で表せ．）



受働状態

$$W = \frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot H^2 \frac{1}{\tan\theta}$$

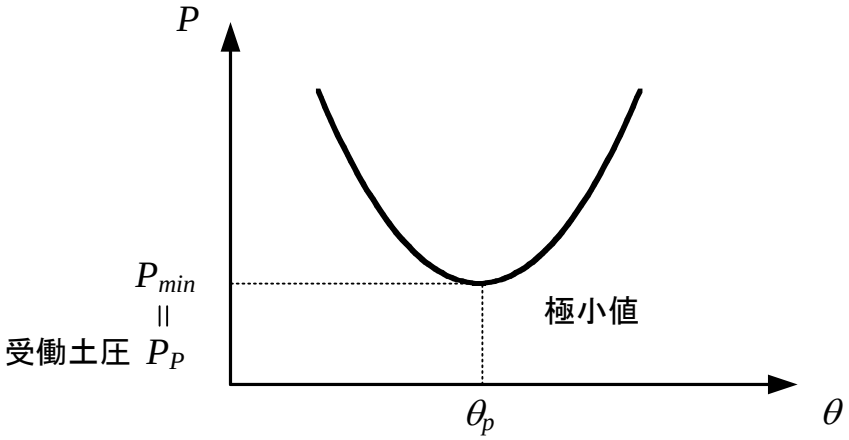
P : 土圧
W : 自重（三角形くさび）
R : 反力

［ヒント］

①三角形くさびにかかる力で
　つり合いの式をたてる．

② Pをθで微分する．

③ $\frac{dP}{d\theta} = 0$ となるときのθを求め，
　Pの極小値P_pを求める．

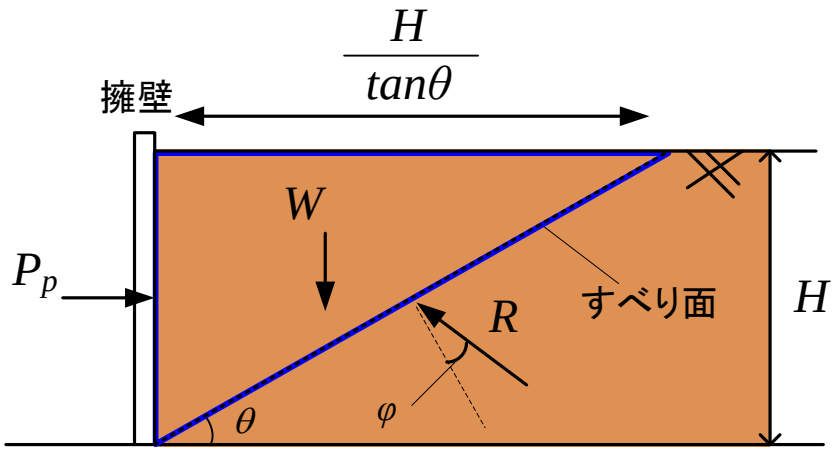


［問題］

右図のように擁壁によって，
三角形の土くさびはつり合っている．

受働状態におけるPの極小値が
受働土圧P_pである．

受働土圧P_pを求めよ．
（ P_pを γ, H, φ で表せ．）



受働状態

$$W = \frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot H^2 \frac{1}{\tan\theta}$$

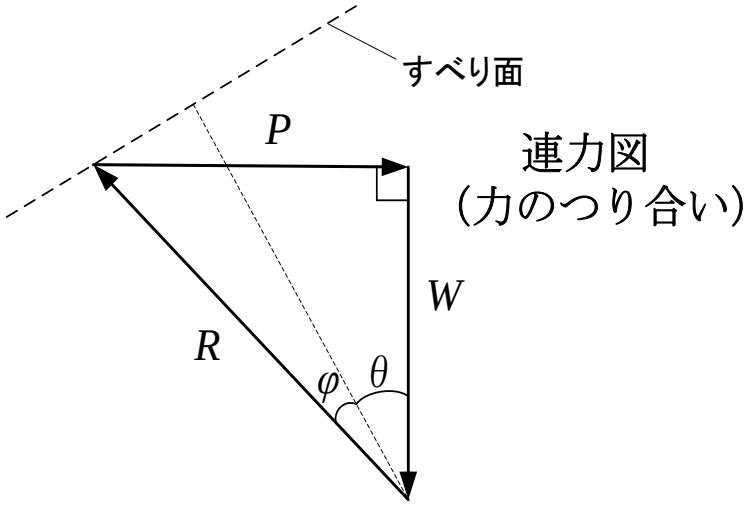
P：土圧
W：自重（三角形くさび）
R：反力

［ヒント］

①三角形くさびにかかる力で
　つり合いの式をたてる．

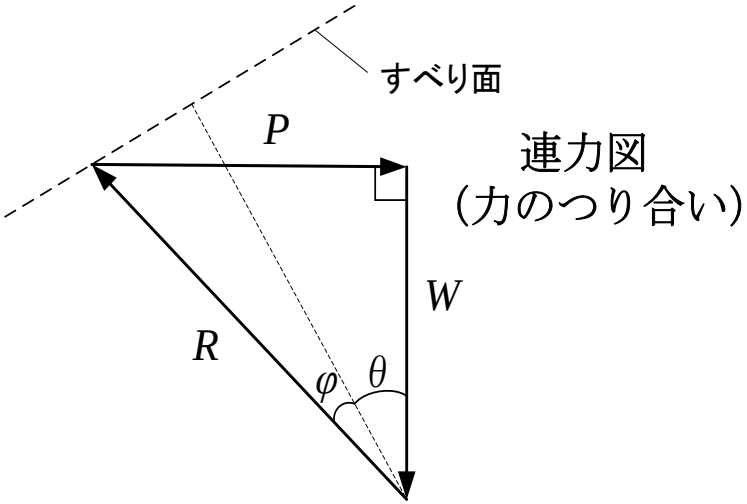
② Pをθで微分する．

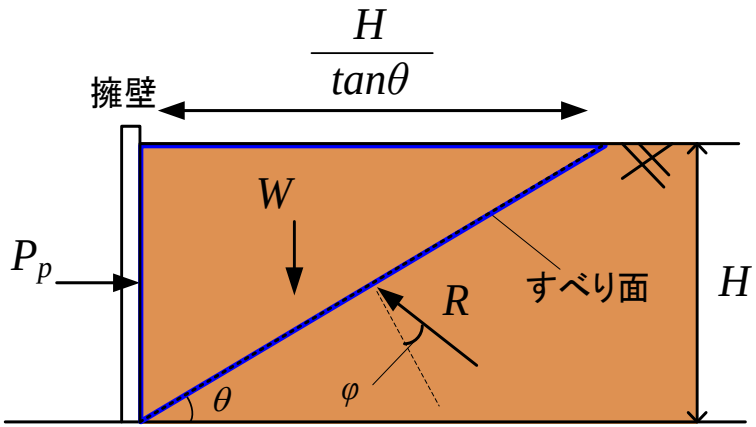
③ $\dfrac{dP}{d\theta} = 0$　となるときのθを求め，
　Pの極小値P_pを求める．



連力図
（力のつり合い）

［解答］





$$\begin{cases} \text{鉛直方向のつり合い：} P = R \cdot \sin(\theta + \varphi) \\ \text{水平方向のつり合い：} W = R \cdot \cos(\theta + \varphi) \end{cases}$$

Rを消去して

$$P = W \cdot \tan(\theta + \varphi)$$

$$\boxed{\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}}$$

主働域の土塊の重量 $W = \dfrac{1}{2} \cdot \gamma \cdot H^2 \dfrac{1}{\tan\theta}$ なので

$$P = \frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot H^2 \frac{\tan(\theta + \varphi)}{\tan\theta}$$

*P*を微分

$$P = \frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot H^2 \frac{\tan(\theta + \varphi)}{\tan\theta}$$

$$\frac{dP}{d\theta} = \frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot H^2 \cdot \left\{ \frac{\tan(\theta + \varphi)}{\tan\theta} \right\}'$$

正接の微分

$$(\tan\theta)' = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

分数の微分

$$y = \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$y' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

$$\frac{dP}{d\theta} = \frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot H^2 \cdot \left\{ \frac{\tan\theta}{\cos^2(\theta + \varphi)\tan^2\theta} - \frac{\tan(\theta + \varphi)}{\tan^2\theta \cdot \cos^2\theta} \right\}$$

$$\frac{dP}{d\theta} = \frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot H^2 \cdot \left\{ \frac{\cos\theta}{\cos^2(\theta + \varphi)\sin\theta} - \frac{\tan(\theta + \varphi)}{\sin^2\theta} \right\}$$

$$\frac{dP}{d\theta} = \frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot H^2 \cdot \left\{ \frac{\sin\theta\cos\theta - \sin(\theta + \varphi)\cos(\theta + \varphi)}{\sin^2\theta\cos^2(\theta + \varphi)} \right\}$$

$$\frac{dP_P}{d\theta} = 0$$ より

$$\text{分子} = \sin\theta\cos\theta - \sin(\theta+\varphi)\cos(\theta+\varphi) = 0$$

$$\frac{1}{2}\sin 2\theta - \frac{1}{2}\sin 2(\theta+\varphi) = 0$$

$$\cos(2\theta+\varphi)\sin\varphi = 0$$

$\sin\varphi \neq 0$ より

$$\cos(2\theta+\varphi) = 0$$

$$2\theta+\varphi = \frac{\pi}{2}$$

$$\theta = -\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}$$

倍角の公式

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

和積の公式

$$\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

よって，受働土圧P_Pは

$$P_P = \frac{1}{2}\cdot\gamma\cdot H^2\cdot\frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)}$$